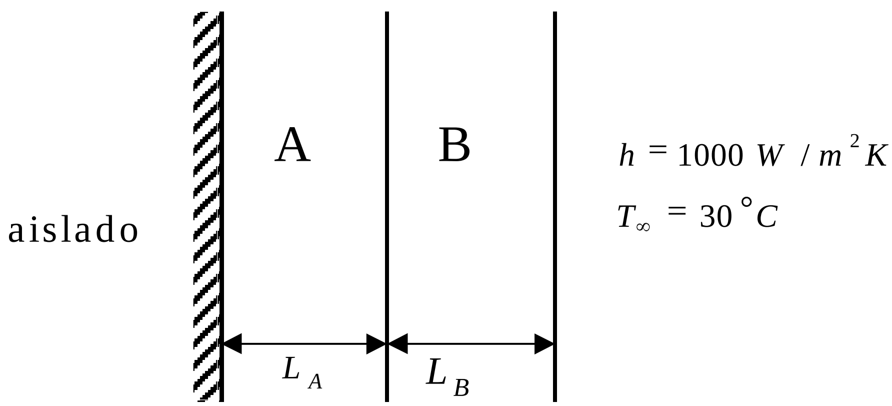
Ejemplo. Una placa plana esta compuesta de dos materiales A y B. La pared del material A tiene una generación de calor $q_g''' = 1.5 \cdot 10^6 \frac{W}{m^3}$, k_A=75 w/mk y L_A= 50 mm.. El material B no tiene generación, con K_B=150 W/mK y L_B=20 mm. . La superficie interna del material A está perfectamente aislada y la superficie externa del material B se enfría mediante agua con $T_\infty = 30\ ^oC$ y $h = 1000\ W/m^2K$. Se pide hallar: (a) el calor disipado, (b) la temperatura de la interfase y (c) La temperatura máxima.



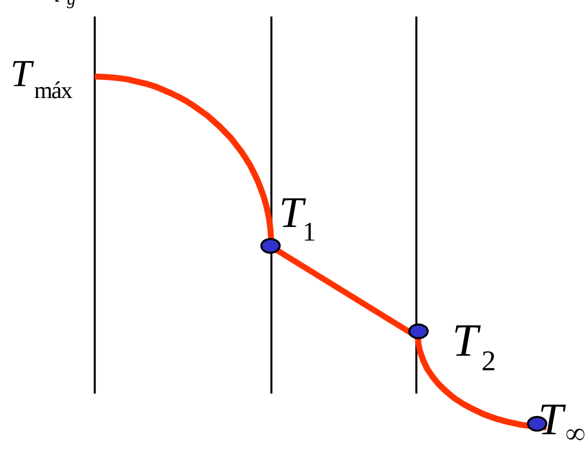
$k_A = 75\ W/mK$

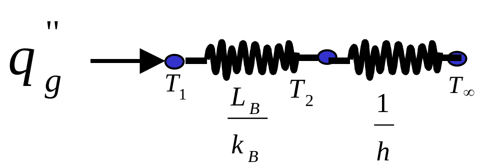
$L_A = 0.05\ m.$

$q_g''' = 1.5 \cdot 10^6 W/m^3$

$k_B = 150\ W/mK$

$L_B = 0.02\ m$





$$q_g'' = q_g''' L_A = 1{,}5 \cdot 10^6 \frac{W}{m^3} \cdot 0{,}05\ m = 7{,}5 \cdot 10^4\ W/m^2$$

$$R''_{cond} = \frac{L_B}{k_B} = 1{,}33 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{W \cdot K}$$

$$R''_{conv} = \frac{1}{h} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{W \cdot K}$$

$$T_1 = T_\infty + (R''_{cond} + R''_{conv}) \cdot q''_g$$

$$T_1 = 115\ ^\circ C$$

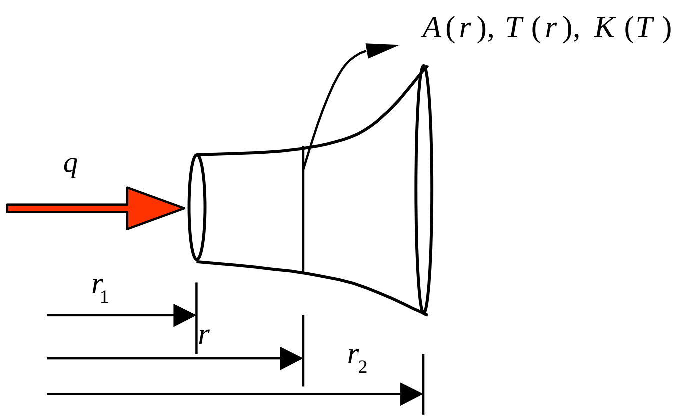
$$T_{\text{máx}} = T_1 + \frac{q'''_g \cdot L_A^2}{2 k_A}$$

$$T_{\text{máx}} = 140\ ^\circ C$$

Conductvidad térmica variable, 1-D, $q'''_g = 0$

Análisis alternativo

Considere, el cuerpo mostrado en la figura. En ella, se da la posibilidad que el área transversal dependa de la posición radial. Dado que se acepta que la conducción de calor es unidimensional y en atención a que no existe generación de calor interna ($q'''_g = 0$), se debe satisfacer que el flujo de calor permanecerá constante.



$$q = -K(T)\,A(r)\,\frac{dT}{dr}$$

$$q\,\frac{dr}{A(r)} = -K(T)\,dT$$

$$q\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{A(r)} = -\int_{T_1}^{T_2} K(T)\,dT$$

Introduciendo, el concepto de Conductividad térmica media, K_m

$$K_m = \frac{\int_{T_1}^{T_2} K(T)\,dT}{T_2 - T_1}$$

$$q\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{A(r)} = -\int_{T_1}^{T_2} K(T)\,dT = K_m\,(T_1 - T_2)$$

De manera, que el calor puede ser calculado por:

$$q = \frac{K_m\,(T_1 - T_2)}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{A(r)}}$$

donde es posible identificar la resistencia térmica , la cual viene expresada por:

$$R = \frac{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{A(r)}}{K_m}$$

placa; $R = \dfrac{L}{K_m\,A}$

cilindro; $R = \dfrac{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{2\pi rL}}{K_m} = \dfrac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi\,K_m\,L}$

esfera; $R = \dfrac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2}}{K_m} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}{4\pi\, K_m}$

Como puede advertirse las expresiones de la resistencia térmica son similares a las desarrolladas para el caso de conductividad constante, con la excepción que ahora se introduce el concepto de conductividad térmica media.

Aletas de enfriamiento.

A diferencia de la discusión planteada en la sección anterior, existen muchas situaciones de interés practico en donde el objetivo fundamental es incrementar el flujo de calor. Si recordamos la ley de Newton, por un instante.

$$q = h\, A\, (T_S - T_\infty)$$

Podríamos, inferir que si deseamos incrementar el flujo de calor, deberíamos incrementar h, la diferencia de temperaturas, o bien el área.

Precisamente la razón de colocar aletas de enfriamiento es incrementar el área, a efectos de aumentar la transferencia de calor.

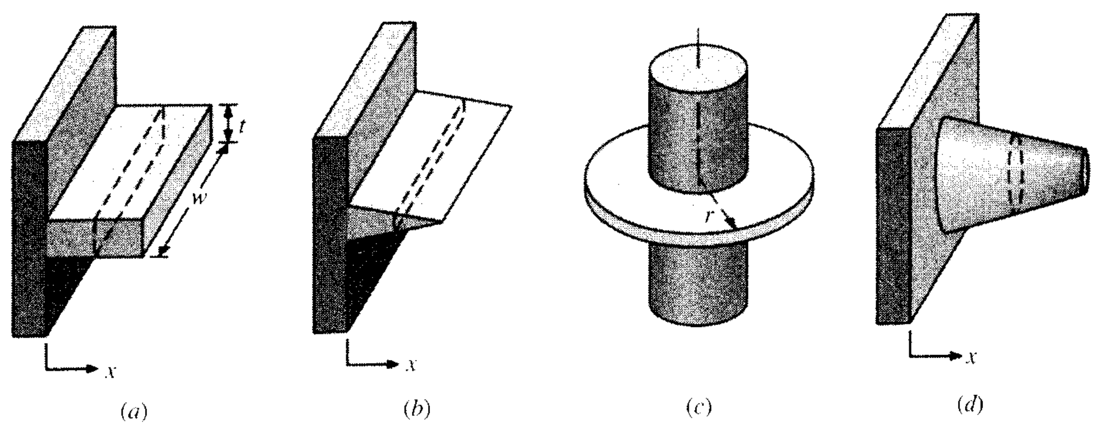


Figura 2.17 Ejemplos de aletas

A continuación realizaremos un análisis para una aleta. En el análisis se propone que existe estado estacionario y que la distribución de temperaturas es sólo función de la coordenada x,T=T(x)

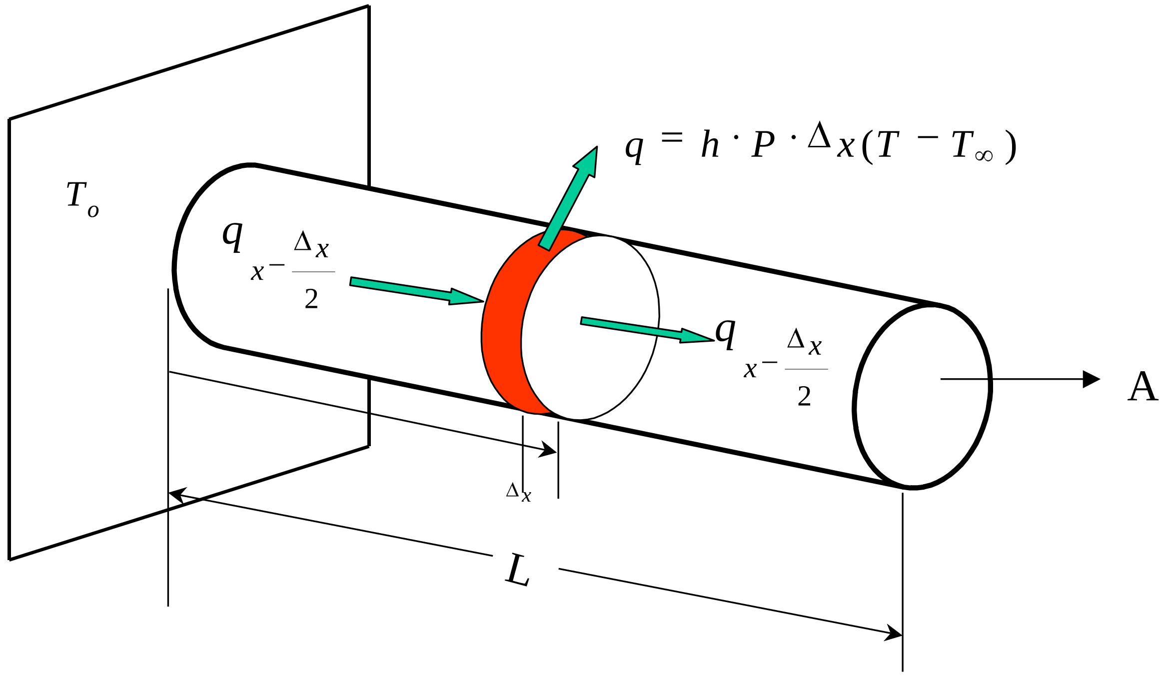


Figura 2.18 Análisis para una aleta

Considere la aleta mostrada en la Figura 2.18, en dicho esquema se muestra el análisis por primera ley de termodinámica para el volumen de control diferencial.

El balance de calor establece:

$$q_{entra} - q_{sale} = 0$$

$$q_{x-\frac{\Delta x}{2}} - q_{x+\frac{\Delta x}{2}} - q_{conv} = 0$$

$$q_{x-\frac{\Delta x}{2}} = q_x - \frac{dq_x}{dx}\frac{\Delta x}{2}$$

$$q_{x+\frac{\Delta x}{2}} = q_x + \frac{dq_x}{dx}\frac{\Delta x}{2}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en balance de calor se tiene:

$$-\frac{dq_x}{dx}\Delta x = h\ P\ \Delta x\ (T - T_\infty)$$

donde

$$dAs = P\Delta x$$

recordando,

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

Simplificando por Δx, se obtiene la ecuación diferencial de una aleta:

$$\frac{d}{dx}(kA\frac{dT}{dx}) - h\ P\ (T - T_\infty) = 0$$

Si la conductividad térmica, k, y el área son constantes, la ecuación se simplifica a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0$$

Para la ecuación anterior vamos a introducir un cambio de variable

$$\theta = T - T_\infty$$

y

$$m^2 = \frac{hP}{kA}$$

En estas nuevas variables la ecuación de la aleta se transforma a :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

La solución general de la aleta viene dada por:

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan con imposición adecuada de las condiciones de borde.

Una de las condiciones de borde corresponde al hecho de que la temperatura de la base es T_0, de tal manera que falta por especificar la condición de borde en el otro extremo de la aleta. Para esta situación existen diversos modelos:

- Caso I. Aleta infinita
- Caso II. Extremo aislado
- Caso III. Extremo convectivo

Caso I. La aleta se supone que es de longitud infinita y que la temperatura en el extremo corresponde a T_∞.

Las condiciones de borde corresponden a:

$$\theta = \theta_o \ , x = 0$$
$$\theta = 0 \quad , x = \infty$$

lo que determina que la distribución de temperaturas venga dada por :

$$\theta = \theta_o e^{-mx}$$

Caso II. Corresponde a especificar que el extremo de la aleta se encuentra aislado térmicamente.

Esta condición de borde tiene como fundamento de que todo el calor es disipado por la periferia de la aleta del tal manera que por el extremo prácticamente no se pierde calor.

Según lo antes señalado las condiciones de borde serian:

$$\theta = \theta_0 = T - T_0 \ , \mathrm{x} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, x = L$$

Imponiendo las condiciones antes señaladas, a la solución general de las aletas se obtiene la siguiente solución:

$$\theta = \theta_0 \cdot \frac{\cosh\,[m\,(L - x)]}{\cosh\,(mL)}$$

Caso III. Esta condición de extremo convectivo es la que mejor representa a la situación que efectivamente ocurre en el extremo de la aleta; es decir que el extremo pierde calor por convección. Las condiciones de borde se escriben para este caso como:

$$\theta = \theta_0 = T - T_0 \quad , \mathrm{x} = 0$$

$$- k \frac{d\theta}{dx} = h\theta, \; x = L$$

y la solución; viene expresada por :

$$\theta = \theta_0 \cdot \frac{\cosh\,[m\,(L - x)] + \dfrac{h}{mk}\mathrm{senh}[\,m\,(L - x)]}{\cosh\,(mL) + \dfrac{h}{mk}\mathrm{senh}(\,m\,L)}$$